

Arkadiusz Filip*

ORCID: 0000-0001-9179-6865

a Filip1@sgh.waw.pl

Sebastian Zieliński**

ORCID: 0000-0001-8933-2308

sebastian.zielinski24@gmail.com

Teoria ruiny w ubezpieczeniach oraz porównanie metod aproksymacji prawdopodobieństwa ruiny w nieskończonym horyzoncie czasowym

Streszczenie

Artykuł przedstawia podstawy teoretyczne teorii ruiny oraz opis klasycznego modelu procesu nadwyżki. Przedstawiono analityczne obliczenia prawdopodobieństwa ruiny w szczególnych przypadkach rozkładu wysokości pojedynczej szkody (wykładniczy, gamma, mieszanina rozkładów wykładniczych). Główną częścią pracy jest analiza dostępnych metod aproksymacji prawdopodobieństwa ruiny w horyzoncie nieskończonym w modelu z czasem ciągłym. Jakość aproksymacji jest badana poprzez porównanie oszacowanego prawdopodobieństwa ruiny z prawdopodobieństwem wyznaczonym analitycznie (tam, gdzie to możliwe) lub przybliżonym numerycznie za pomocą formuły Pollaczka-Chinczyna. Błędy aproksymacji (w ujęciu bezwzględnym i względnym) przedstawiono dla wybranych rozkładów lekkoogonowych (mieszanina rozkładów wykładniczych, rozkład gamma) i rozkładów gruboogonowych (Pareto, lognormalny, Weibulla i Burra). Celem pracy jest ocena możliwości wykorzystania metod aproksymacji prawdopodobieństwa ruiny w działalności zakładów ubezpieczeń, z uwzględnieniem takich obszarów, jak taryfikacja czy wypłacalność zakładów ubezpieczeń, zwłaszcza w kontekście reżimu Wypłacalność II. Przeprowadzone analizy pozwalają zauważyć, że w większości przypadków wyniki aproksymacji można uznać za dość satysfakcjonujące (błąd względny nieprzekraczający 5%), przy czym najmniejsze błędy uzyskano dla aproksymacji Cramera-Lundberga i de Vyldera w przypadku rozkładów lekkoogonowych oraz dla aproksymacji Beekmana-Bowersa i de Vyldera w przypadku rozkładów gruboogonowych. Jakość dopasowania, mierzona błędem względnym, generalnie maleje wraz ze spadkiem zakładanego prawdopodobieństwa ruiny, szczególnie dla rozkładów gruboogonowych.

* Arkadiusz Filip – doktor nauk ekonomicznych, asystent w Instytucie Ekonometrii, Szkoła Główna Handlowa w Warszawie; Dyrektor w zespole European Actuarial Services w EY Consulting.

** Sebastian Zieliński – absolwent kierunku Metody Ilościowe w Ekonomii i Systemy Informacyjne, Szkoła Główna Handlowa.

Słowa kluczowe: teoria ruiny, proces nadwyżki, prawdopodobieństwo ruiny, aproksymacja, rozkłady lekkoogonowe, rozkłady gruboogonowe

JEL: C13, C46, G22

Ruin theory in insurance and the comparison of methods for approximation of the ruin probability in infinite time horizon

Abstract

The article presents theoretical background of ruin theory and the description of the classical model for the insurer's surplus. Analytical calculation of the ruin probability are presented for special cases of the single loss distribution (exponential, gamma and mixture of exponential distributions). The main focus is on the analysis of available methods for approximation of the ruin probability in infinite horizon in continuous-time model. The quality of approximation is tested by comparing the approximated ruin probability with the probability determined analytically (if possible) or estimated numerically with use of Pollaczek-Khinchin formula. The approximation errors (in both absolute and relative terms) are shown for selected light-tailed distributions (mixture of exponential distributions, gamma) and heavy-tailed distributions (Pareto, lognormal, Weibull and Burr). The goal of the article is the assessment of the possibilities to use the approximation methods for ruin probability by insurance companies, including areas such as pricing or solvency, especially in the context of Solvency II regime. The analyses performed show that in most cases approximation results are quite satisfying (relative error not exceeding 5%) and the lowest errors are observed for Cramer-Lundberg and de Vylder approximations in case of light-tailed distributions and for Beekman-Bowers and de Vylder approximations in case of heavy-tailed distributions. The approximation quality in general deteriorates in line with the decreasing assumed ruin probability, especially for heavy-tailed distributions.

Key words: ruin theory, surplus process, ruin probability, approximation, light-tailed distributions, heavy-tailed distributions

JEL Codes: C13, C46, G22

Wstęp

Działalność instytucji finansowych, takich jak zakłady ubezpieczeń czy banki, wiąże się nieodzwrotnie z ryzykiem, które może przybierać różne formy. W przypadku banku jest to głównie ryzyko finansowe i kredytowe, w przypadku zakładu ubezpieczeń istotną rolę odgrywa ryzyko ubezpieczeniowe, związane z przebiegiem szkodowości wśród ubezpieczonych. Kluczowa w zarządzaniu zakładem ubezpieczeń jest kwantyfikacja ryzyka i utrzymywanie go na odpowiednim poziomie, zgodnym z tzw. apetytem na ryzyko. Realizacja ryzyka ubezpieczeniowego może nieść ze sobą poważne konsekwencje, prowadząc nawet do bankructwa zakładu. Z tego powodu organy nadzoru w wielu krajach wydają wiele regulacji, jakie mają na celu minimalizację ryzyka upadłości, w tym konieczność naliczania tzw. wymogów wypłacalności. W Unii Europejskiej kwestie wypłacalności reguluje dyrektywa unijna

Wypłacalność II, która weszła w życie 1 stycznia 2016 roku. Zgodnie z tą dyrektywą zakłady muszą obliczyć Kapitałowy Wymóg Wypłacalności (SCR – *Solvency Capital Requirement*) oraz Minimalny Wymóg Kapitałowy (MCR – *Minimum Capital Requirement*). Wysokość SCR odpowiada wartości narażonej na ryzyko podstawowych środków własnych zakładu ubezpieczeń na poziomie ufności 99,5% w ciągu jednego roku, a liczona jest z uwzględnieniem sześciu modułów ryzyka (rynkowe, niewykonania zobowiązania przez kontrahenta, w ubezpieczeniach zdrowotnych, w ubezpieczeniach na życie, w ubezpieczeniach innych niż na życie, wartości niematerialnych i prawnych), ryzyka operacyjnego oraz korekty z tytułu zdolności rezerw techniczno-ubezpieczeniowych i odroczonej podatku dochodowego do pokrywania strat.

Oprócz kalkulacji wymogu wypłacalności w celu spełnienia wymagań regulacyjnych, zakłady ubezpieczeń posługują się również innymi miarami, które mogą pomóc w zarządzaniu ryzykiem. Jedną z takich miar jest prawdopodobieństwo ruiny, które może być obliczane dla konkretnego portfela umów ubezpieczenia i mówi o tym, ile wynosi prawdopodobieństwo, że w określonym horyzoncie czasu (skończonym lub nieskończonym) łączna wartość szkód przekroczy łączną wartość składek powiększoną o tzw. nadwyżkę początkową, czyli dojdzie do ruiny zakładu ubezpieczeń. Teoria ruiny dostarcza przydatnych narzędzi matematycznych do kwantyfikacji ryzyka, na jakie narażony jest zakład. W wielu przypadkach dokładne obliczenie prawdopodobieństwa ruiny jest jednak trudne lub wręcz niemożliwe i konieczne są aproksymacje. Ocena możliwości wykorzystania różnych metod aproksymacji jest głównym celem niniejszego artykułu. Podzielony jest on na dwie części: w pierwszej przedstawiono wprowadzenie do teorii ruiny, jej wybrane własności, a także ograniczenia i trudności. Finalnie wyprowadzono tzw. model klasyczny wraz z jego aplikacją dla kilku rozkładów prawdopodobieństwa wysokości szkód z jawnymi analitycznymi wzorami. W drugiej części dokonano przeglądu wybranych metod aproksymacji w modelu z ciągłą kontrolą wypłacalności w nieskończonym horyzoncie czasowym oraz ich empirycznych rezultatów na wybranych przykładach. W podsumowaniu dokonano oceny możliwości wykorzystania teorii ruiny oraz metod aproksymacji prawdopodobieństwa ruiny w działalności zakładów ubezpieczeń, z uwzględnieniem taryfikacji, zarządzania ryzykiem oraz kontekstu wymogów reżimu Wypłacalność II.

1. Teoria ruiny – zagadnienia ogólne

1.1. Podstawowe pojęcia. Model ciągły nadwyżki ubezpieczyciela

W literaturze teoria ruiny (*ruin theory*) jest podstawowym narzędziem służącym systematycznemu monitorowaniu długookresowej działalności zakładu ubezpieczeń. Jej analizę należy rozpocząć od zdefiniowania pojęć stanowiących podstawę dalszych rozważań. Teoria koncepcyjnie koncentruje swoją uwagę na fakcie, że zakłady ubezpieczeń w podstawowym zakresie swojej działalności doświadczają

przepływów pieniężnych w dwóch kierunkach. Wpływami są dochody z zebranych składek (*premiums*), z kolei źródłem kosztów są wysokości wypłacanych odszkodowań i świadczeń (*claims*). Pomijana jest aktywność zakładów ubezpieczeniowych na wszelkich innych płaszczyznach (np. inwestycyjnej, lokacyjnej), jak i inne źródła kosztów (administracyjne, akwizycji, pozostałe operacyjne itd.). Różnica między zebranymi składkami, a wypłaconymi odszkodowaniami w danej jednostce czasu nazywana jest nadwyżką (*surplus*) – ujemną nadwyżkę rozumiemy jako deficyt. Zakładamy ponadto, że zakład ubezpieczeń dysponuje na starcie pewnym kapitałem początkowym (*initial surplus*), umożliwiającym rozpoczęcie świadczenia usług. W tak zdefiniowanym modelu koncentrujemy się wyłącznie na przepływach związanych z działalnością techniczną, skupiając swoją uwagę na występowaniu efektu dywersyfikacji¹ ryzyk w wymiarze czasowym. Matematyczną reprezentacją powyższego opisu jest długoterminowy proces nadwyżki (wysokość środków własnych) zakładu ubezpieczeń, będący następującą funkcją czasu:

$$U(t) = u + ct - S(t), \quad (1)$$

w którym:

$t \geq 0$ – zmienna wyrażająca kolejne jednostki czasu,

$u \geq 0$ – kapitał początkowy zakładu ubezpieczeń w chwili $t = 0$,

$c \geq 0$ – składka zebrana za jednostkowy okres czasu,

$U(t)$ – wartość procesu w chwili t ,

$S(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i$ – łączna wartość odszkodowań za szkody zaistniałe w okresie $(0, t)$,

Y_i – wartość wypłaty odszkodowania z pojedynczej szkody,

$N(t)$ – liczba szkód zaistniała w okresie $(0, t)$.

W modelu zakładamy, że wszystkie szkody Y_i pochodzą z tego samego rozkładu prawdopodobieństwa oraz są między sobą wzajemnie niezależne. Z kolei proces pojawiania się szkód $N(t)$ jest niezależny od ich wysokości, zależy natomiast od liczby ubezpieczanych ryzyk. Należy zauważyć, że model cechuje się podwójną losowością, tzn. mamy do czynienia z *losową liczbą szkód*: $N(t)$ – o *losowych wysokościach odszkodowania*: Y_i .

Ruinę ubezpieczyciela (zdarzenie polegające na utracie wypłacalności) definiuje się jako pierwszy **moment czasu**, w którym zaprezentowany w równaniu (1) proces nadwyżki przyjmuje wartość mniejszą od zera (Otto 2008):

$$T := \inf(t \geq 0: U(t) < 0). \quad (2)$$

¹ Efekt dywersyfikacji to jedno z kluczowych pojęć w branży ubezpieczeniowej. Za definicją ustawową, jest to: „ograniczenie ekspozycji na ryzyko zakładów ubezpieczeń i zakładów reasekuracji oraz grup związane z dywersyfikacją ich działalności, wynikające z faktu, że strata z tytułu realizacji jednego rodzaju ryzyka może zostać skompensowana brakiem realizacji lub niepełną realizacją innego rodzaju ryzyka, w przypadku gdy ryzyka te nie są w pełni skorelowane”; W teorii ruiny efekt dywersyfikacji można rozumieć jako zdolność do kompensacji w przyszłych okresach strat poniesionych w jednym z okresów sprawozdawczych.

Wówczas przy skończonym t mówimy o **prawdopodobieństwie ruiny w skończonym horyzoncie czasowym** (konkretnie na odcinku czasowym długości $(0, t)$), definiując je następująco (Otto 2008):

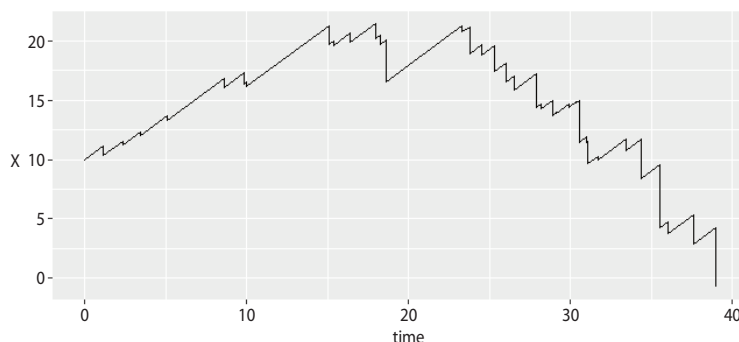
$$\psi(u, t) := P(T < t). \quad (3)$$

Z kolei przy czasie zbiegającym do nieskończoności mówimy o **prawdopodobieństwie ruiny w nieskończonym horyzoncie czasowym**, zdefiniowanym poniżej (Otto 2008):

$$\psi(u) := \lim_{t \rightarrow \infty} \psi(u, t) = P(T < \infty). \quad (4)$$

Przedstawione wzory prezentują tak zwany **model ciągły nadwyżki ubezpieczyciela**, który zakłada, że ubezpieczyciel poddawany jest kontroli wypłacalności w każdej chwili trwania procesu, a ruinę zakładu jednoznacznie wyznacza pierwszy moment, w którym wartość procesu spadnie poniżej zera. Na rysunku 1 przedstawiono przykładowy przebieg procesu nadwyżki w modelu z ciągłą kontrolą wypłacalności.

Rysunek 1. Przykładowy przebieg procesu nadwyżki ubezpieczyciela $U(t)$ w modelu z ciągłą kontrolą wypłacalności



Źródło: opracowanie własne.

Oś odciętych reprezentuje upływ czasu, zaś oś rzędnych kapitał początkowy. W prezentowanym przykładzie proces rozpoczyna się z nadwyżką początkową $u = 10$. Warto zauważyć stałą intensywność napływania składek, co na wykresie przedstawia stały kąt nachylenia funkcji w przedziałach, gdy jest ona rosnąca (pomiędzy poszczególnymi szkodami). Skokowy spadek wartości funkcji prezentuje momenty wypłaty poszczególnych szkód. Chwila $T \approx 38$ (czas w tym modelu jest zmienną ciągłą o nieskończonej podzielności) jest momentem ruiny, gdyż następuje w niej pierwszy spadek poniżej zera. Samo zaistnienie ruiny nie musi oznaczać automatycznie bankructwa zakładu ubezpieczeń. Ruina odzwierciedla jedynie ujemny wynik na czystej działalności technicznej, z pominięciem wszelkich innych aktywności ekonomicznych zakładu ubezpieczeń (kosztów i zysków).

1.2. Model klasyczny. Współczynnik dopasowania. Nierówność Lundberga

Model klasyczny w teorii ruiny konstituowany jest przez dalsze założenie o wykładniczym rozkładzie odstępów czasu pomiędzy kolejnymi szkodami. Wychodząc z tego założenia, da się udowodnić, że liczba szkód w jednostce czasu opisana jest rozkładem Poissona. Wówczas proces pojawiania się szkód $N(t)$ spełnia założenia procesu Poissona (o niezależnych i stacjonarnych przyrostach), a składnik $S(t)$ występujący w równaniu (1), reprezentujący łączną wartość odszkodowań w danym okresie, dany jest złożonym rozkładem Poissona o parametrach $(\lambda t, F_y)$, tj.: $S(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i \sim CPoisson(\lambda t, F_y)$, gdzie F_y to dystrybuanta rozkładu wartości pojedynczej szkody (Niemiro 2013). W mocy niezmiennie pozostają założenia o wzajemnej niezależności wysokości poszczególnych szkód Y_i oraz ich niezależności od zmiennej $N(t)$.

Modyfikując formę zapisu klasycznego procesu nadwyżki ubezpieczyciela, można wysnuć elementarne wnioski odnośnie do składki w modelu klasycznym. Pierwszym krokiem jest podział procesu na poszczególne odcinki do momentu wystąpienia kolejnej z k szkód:

$$U(T_k) = u + (cW_1 - Y_1) + (cW_2 - Y_2) + \dots + (cW_k - Y_k), \quad (5)$$

gdzie:

$W_k = T_k - T_{k-1} \sim Exp(\lambda)$ – odstęp czasu pomiędzy kolejnymi szkodami dany jest rozkładem wykładniczym,

$$E(W_k) = \frac{1}{\lambda},$$

$$T_0 = 0,$$

$$E(Y_k) = \mu.$$

Wówczas proces reprezentowany jest przez: niezmienną nadwyżkę początkową (u), zaś każdy z członów $(cW_k - Y_k)$ przedstawia nadwyżkę między składką uzyskaną od momentu $k-1$ szkody, do momentu wystąpienia kolejnej, k -tej szkody, a wysokością k -tej szkody. Dodatkowo wiemy, że wszystkie szkody mają jednakowy rozkład. Zatem wartość oczekiwana nadwyżki składki nad pojedynczą szkodą wynosi:

$$E(cW_k - Y_k) = cE(W_k) - E(Y_k) = cE(W) - E(Y) = \frac{c}{\lambda} - \mu. \quad (6)$$

Można zauważyć, że jeśli nadwyżka ta jest ujemna (zebrane składki są niższe niż oczekiwana wartość odszkodowań), ruina zachodzi z prawdopodobieństwem równym 1 – wynika to z mocnego prawa wielkich liczb (Szekli 2012).

$$\text{Jeżeli } E(cW_k - Y_k) < 0, \text{ to } P\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n (cW_k - Y_k) = -\infty\right) = 1. \quad (7)$$

Warunek ten formalnie determinuje zatem intuicyjnie oczywistą własność, jaką musi spełniać składka – musi ona przewyższać oczekiwaną wartość wypłaconych odszkodowań.

$$c > \mu\lambda. \quad (8)$$

Często składkę zapisuje się również z zastosowaniem dodatkowego czynnika reprezentującego tzw. współczynnik bezpieczeństwa (*safety loading*). Wówczas składkę wyznacza się jako oczekiwaną wypłatę odszkodowań przeskalowaną przez wspomniany współczynnik bezpieczeństwa $\theta > 0$.

$$c = (1 + \theta)\mu\lambda, \theta > 0. \quad (9)$$

Dodatni znak współczynnika θ jest warunkiem koniecznym do uniknięcia ruiny. W praktyce zakładom ubezpieczeń zależy na tym, by prawdopodobieństwo ruiny było niskie i oscylowało w (tolerowanych) granicach zera.

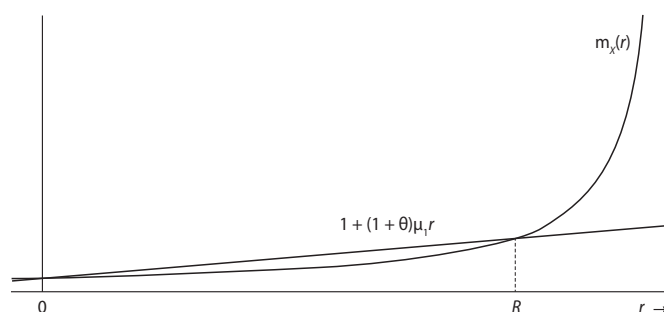
Dla wyznaczenia prawdopodobieństwa ruiny i/lub jego aproksymacji zasadnicze znaczenie ma tzw. **współczynnik dopasowania** (*adjustment coefficient*). Poprzez wprowadzenie współczynnika bezpieczeństwa możemy zdefiniować współczynnik dopasowania jako dodatni pierwiastek równania (Kaas et al. 2009):

$$1 + (1 + \theta)\mu \cdot r = M_x(r), \quad (10)$$

gdzie $M_x(r)$ – funkcja generująca momenty rozkładu szkód (dalej w skrócie: FGM).

Współczynnik wymusza istnienie funkcji generującej momenty rozkładu szkody oraz powiela założenie o składce przewyższającej wartość oczekiwaną wysokości szkody (w przeciwnym razie nie istnieje dodatnie rozwiązanie równania). Przy tych założeniach wiemy, że współczynnik dopasowania jest jednoznacznie określony, co znajduje swoją elegancką, graficzną interpretację (rysunek 2). Lewa strona równania (10) jest funkcją liniową zmiennej r ze współczynnikiem kierunkowym $(1 + \theta)\mu$ i wyrazem wolnym 1. Z kolei prawa strona nierówności – $M_x(r)$ jest funkcją wypukłą na przedziale $(0, \infty)$ – warunkuje to znak drugiej pochodnej – $M_x''(r) = E(X^2 e^{rX}) > 0$. Ponadto pierwsza pochodna FGM w zerze jest mniejsza od współczynnika kierunkowego lewej strony równości, $M_x'(0) < (1 + \theta)\mu$. Oznacza to, że wykresy obu stron równości muszą przeciąć się dokładnie w jednym punkcie na półosi dodatniej, jednoznacznie wyznaczając współczynnik dopasowania.

Rysunek 2. Jednoznaczność istnienia współczynnika dopasowania



Źródło: Kaas et al. 2009, s. 92.

Dysponując współczynnikiem R , możemy ostatecznie podać wzór na prawdopodobieństwo ruiny w modelu klasycznym (Grandell 1991):

$$\psi(u) = \frac{e^{-Ru}}{E(e^{-RU(T)}|T < \infty)}, u \geq 0. \quad (11)$$

Niestety jego praktyczne wykorzystanie bywa problematyczne. Szczególnych trudności nastrocza mianownik prawej strony równania, w którym należy obliczyć warunkową wartość oczekiwaną pewnej funkcji nadwyżki procesu pod warunkiem, że do ruiny faktycznie dojdzie. W istocie jest to funkcja generująca momenty rozkładu wysokości deficytu w momencie zajścia szkody, który *explicite* nie jest znany. Obliczenie tego wyrażenia w ogólności jest trudne, często wymaga rozwiązywania równań różniczkowo-całkowych lub wykorzystania transformaty Laplace'a (Shortle et al. 2003). Wobec tego powszechną praktyką jest stosowanie rozsądnych aproksymacji/ograniczeń. Nierówność Lundberga jest jednym z najbardziej popularnych i narzucających się oszacowań górnych prawdopodobieństwa ruiny. Jej prawdziwość można uzasadnić bardzo prostą obserwacją: jeśli do ruiny dojdzie, to z definicji proces nadwyżki osiąga wówczas wartość ujemną (w przeciwnym razie nie ma zjawiska ruiny). Wobec tego wartość wyrażenia z mianownika wzoru na prawdopodobieństwo ruiny jest większa lub równa 1:

$$E(e^{-RU(T)}|T < \infty) \geq 1, \quad (12)$$

co prowadzi do wniosku:

$$\psi(u) \leq e^{-Ru}. \quad (13)$$

Jest to więc w istocie rzeczy pominięcie mianownika równania (przyjęcie dla niego skrajnej wartości równej 1), który musi być większy lub równy 1. Oczywiście jest, że w praktyce takie oszacowanie może prowadzić do istotnego przeszacowania prawdopodobieństwa ruiny, jeśli rzeczywista wartość mianownika jest zauważalnie większa od jedności.

1.3. Model klasyczny z rozkładami wysokości szkód: wykładniczy, n -wykładniczy, gamma

Model klasyczny narzuca ściśle założenia związane z czasem pojawiania się szkód. Swobodny pozostaje natomiast sam rozkład wysokości szkody. Ze wzorów dotyczących współczynnika dopasowania wiemy, że aby on istniał, momenty rozkładu powinny być skończone, tzn. FGM musi być określona. O ile w ogólnym przypadku zaaplikowanie dokładnego wzoru jest trudne, o tyle w przypadku konkretnych rozkładów (np. dwupunktowy, wykładniczy, gamma) można uzyskać dokładne analityczne wzory na prawdopodobieństwo ruiny. W dalszej części artykułu przedstawiono tabelaryczne porównanie, jak modyfikowanie poszczególnych parametrów wejściowych (tj. parametru(ów) rozkładu(ów) szkody, współczynnika bezpieczeństwa oraz kapitału początkowego) wpływa na prawdopodobieństwo ruiny

dla trzech lekkoogonowych rozkładów²: wykładniczego, mieszaniny rozkładów wykładniczych oraz gamma.

Przyjmując, że wysokość pojedynczej szkody ma rozkład wykładniczy, możemy skorzystać z jego własności tzw. „braku pamięci”, która sprawia, że rozkład deficytu w momencie ruiny również jest wykładniczy (Otto 2008). Wówczas mianownik wzoru (11) można zapisać jako funkcję tworzącą momenty rozkładu wykładniczego, a następnie uprościć wzór na prawdopodobieństwo ruiny. Dalej, obliczając współczynnik dopasowania dla rozkładu wykładniczego, otrzymujemy jawny wzór na prawdopodobieństwo ruiny w modelu klasycznym w nieskończonym horyzoncie czasowym z wykładniczym rozkładem szkody o parametrze β (Otto 2008):

$$\psi(u) = \frac{1}{1 + \theta} \exp\left(\frac{-\theta\beta u}{1 + \theta}\right). \quad (14)$$

Dla powyższego zestawu założeń parametrami wpływającymi na prawdopodobieństwo ruiny są u , θ oraz β , czyli odpowiednio kapitał początkowy, narzut bezpieczeństwa oraz parametr rozkładu wykładniczego. W tabeli 1 przedstawiono prawdopodobieństwa ruiny dla przykładowych wartości powyższych zmiennych.

Tabela 1. Prawdopodobieństwa ruiny ze względu na kapitał początkowy i współczynnik bezpieczeństwa dla rozkładu wykładniczego z parametrem $\beta = 0,001$

	$u = 0$	$u = 1000$ $= \mu$	$u = 5000$ $= 5\mu$	$u = 10\,000$ $= 10\mu$	$u = 25\,000$ $= 25\mu$	$u = 50\,000$ $= 50\mu$	$u = 100\,000$ $= 100\mu$
$\theta = 0,05$	0,9524	0,9081	0,7506	0,5916	0,2896	0,0881	0,0081
$\theta = 0,10$	0,9091	0,8301	0,5770	0,3663	0,0937	0,0097	$1,02 \cdot 10^{-4}$
$\theta = 0,15$	0,8696	0,7632	0,4530	0,2360	0,0334	0,0013	$1,88 \cdot 10^{-6}$
$\theta = 0,20$	0,8333	0,7054	0,3622	0,1574	0,0129	$2 \cdot 10^{-4}$	$4,81 \cdot 10^{-8}$
$\theta = 0,25$	0,8000	0,6550	0,2943	0,1083	0,0054	$3,63 \cdot 10^{-5}$	$1,65 \cdot 10^{-9}$
$\theta = 0,30$	0,7692	0,6107	0,2426	0,0765	0,0024	$7,5 \cdot 10^{-6}$	$7,31 \cdot 10^{-11}$

Źródło: opracowanie własne.

Dla rozkładu wykładniczego o parametrze $\beta = 0,001$, a więc wartości oczekiwanej wysokości przeciętnej szkody równej 1000, w uszeregowaniu kolumnowym można zaobserwować, jak zwiększanie kapitału początkowego wpływa na obniżanie prawdopodobieństwa ruiny. Przykładowo, dla wartości $\theta = 0,10$ kapitał początkowy w wysokości wartości oczekiwanej szkody daje ruinę z prawdopodobieństwem

² Rozkład $F_x(x)$ jest rozkładem lekkoogonowym, jeżeli istnieją dodatnie stałe a i b takie, że dla każdego $x \geq 0$ zachodzi: $1 - F_x(x) \leq ae^{-bx}$. Rozkłady z ciężkimi ogonami są to rozkłady, których ogony nie są ograniczone wykładniczo, tzn. mają grubsze ogony niż rozkład wykładniczy (Rolski 2010).

ok. 83%. Posiadanie odpowiednio: 5, 10, 25, 50-krotności kapitału startowego w relacji do wartości oczekiwanej wysokości szkody sukcesywnie obniża ryzyko ruiny do wartości poniżej 1%. Wierszowo można prześledzić ten efekt (dla ustalonego kapitału początkowego) w odniesieniu do narzutu bezpieczeństwa (marży zakładu ubezpieczeń). Oczywiście jest, że podnoszenie współczynnika bezpieczeństwa zmniejsza ryzyko ruiny poprzez zwiększoną intensywność napływu składek, tj. wyższy kąt nachylenia procesu na wykresie pomiędzy kolejnymi szkodami, na odcinkach wzrostowych.

Dla mieszaniny dwóch rozkładów wykładniczych z parametrami α, β i odpowiednio wagami $q, 1 - q$ można uzyskać jawny wzór analityczny przy użyciu transformaty Laplace'a (Burnecki, Mišta, Weron 2005a).

$$\psi(u) = \frac{1}{(1+\theta)(r_2-r_1)} \{(\rho-r_1)e^{(-r_1u)} + (r_2-\rho)e^{(-r_2u)}\}, \text{ gdzie:}$$

$$r_1 = \frac{\rho + \theta(\alpha + \beta) - [\{\rho + \theta(\alpha + \beta)\}^2 - 4\alpha\beta\theta(1 + \theta)]^{\frac{1}{2}}}{2(1 + \theta)},$$

$$r_2 = \frac{\rho + \theta(\alpha + \beta) + [\{\rho + \theta(\alpha + \beta)\}^2 - 4\alpha\beta\theta(1 + \theta)]^{\frac{1}{2}}}{2(1 + \theta)}$$

$$p = \frac{q\alpha^{-1}}{q\alpha^{-1} + (1-q)\beta^{-1}}, \quad \rho = \alpha(1-p) + \beta p. \quad (15)$$

Tabela 2. Prawdopodobieństwa ruiny ze względu na kapitał początkowy i współczynnik bezpieczeństwa dla mieszaniny rozkładów wykładniczych z parametrami $\alpha = 0,001, \beta = 0,000001$ oraz wagami: 0,75; 0,25

	$u = 10^4$	$u = 10^5$	$u = 10^6$	$u = 10^7$	$u = 10^8$
$\theta = 0,05$	0,9518	0,9477	0,9078	0,5907	0,0080
$\theta = 0,10$	0,9080	0,9006	0,8297	0,3653	$9,91 \cdot 10^{-5}$
$\theta = 0,15$	0,8681	0,8579	0,7627	0,2351	$1,82 \cdot 10^{-6}$
$\theta = 0,20$	0,8315	0,8191	0,7048	0,1567	$4,62 \cdot 10^{-8}$
$\theta = 0,25$	0,7979	0,7836	0,6543	0,1077	$1,57 \cdot 10^{-9}$
$\theta = 0,30$	0,7669	0,7511	0,6070	0,0761	$6,93 \cdot 10^{-11}$

Źródło: opracowanie własne.

Parametry rozkładów wykładniczych użytych w tabeli 2 zostały wybrane w powyższym przykładzie w sposób arbitralny. Mieszanina rozkładów wykładniczych pozwala na znacznie większą elastyczność w kreowaniu rozkładów, wymaga jednak szacowania większej liczby parametrów (w przypadku dwuwymiarowym będą to dwa parametry rozkładów oraz ich wagi). Dla mieszaniny $n > 2$ rozkładów wykładniczych również można przedstawić dokładne analityczne wzory na prawdopodobieństwo ruiny (w ogólności jest to wykonalne dla rozkładów typu fazowego). Nie będą one tutaj jednak dalej przedstawiane ze względu na postępującą złożoność wzorów oraz relatywnie niewielkie praktyczne zastosowanie ze względu na rosnącą liczbę parametrów.

Grandell i Segerdahl udowodnili, że dla szkód z rozkładu gamma z parametrami $\alpha \leq 1$ i średnią równą 1 jawny wzór na prawdopodobieństwo ruiny przyjmuje następującą postać (Grandell, Segerdahl 1971):

$$\psi(u) = \frac{\theta \left(1 - \frac{R}{\alpha}\right) \exp\left(\frac{-\beta R u}{\alpha}\right)}{1 + (1 + \theta)R - (1 + \theta)\left(1 - \frac{R}{\alpha}\right)} + \frac{\alpha \theta \sin(\alpha \pi)}{\pi} \cdot I, \text{ gdzie:}$$

$$I = \int_0^{\infty} \frac{x^{\alpha} \exp\{-(x+1)\beta u\}}{[x^{\alpha}\{1 + \alpha(1 + \theta)(x+1)\} - \cos(\alpha \pi)]^2 + \sin^2(\alpha \pi)} dx. \quad (16)$$

Powyższa całka obliczana jest w sposób numeryczny. Ponadto z własności rozkładu gamma jesteśmy w stanie dostosować wzór dla dowolnej średniej, a więc zliberalizować założenie równości obu parametrów (Burnecki, Miśta, Weron 2005a):

$$\psi_X(u) = \psi_{X/\mu}(u/\mu), \quad \psi_{G(\alpha, \beta)}(u) = \psi_{G(\alpha, \alpha)}(\beta u/\alpha). \quad (17)$$

Modyfikacje obu parametrów pozwalają na uzyskanie całej gamy rozkładów o różnych kształtach i wartościach oczekiwanych. Poniżej zaprezentowano prawdopodobieństwa ruiny dla przykładowych wartości:

Wartości parametrów w tabeli 3 zostały dobrane tak, by wartość oczekiwana wysokości szkody wynosiła 1000 – w ten sposób można je porównać z samym rozkładem wykładniczym przedstawionym w tabeli 1. Oczywistym faktem wynikającym z definicji wartości oczekiwanej w rozkładzie gamma jest obserwacja, że zwiększanie parametru α oraz zmniejszanie parametru β będzie prowadzić do generowania możliwie wysokich szkód osiągalnych w tej klasie rozkładów. W tabeli 4 pokazano przykład liczbowy przedstawiający graniczny przypadek dla parametru kształtu $\alpha = 1$, dla parametru skali $\beta = 10^{-7}$ – co daje wartość oczekiwaną wysokości szkody równą 1 000 000.

Tabela 3. Prawdopodobieństwa ruiny ze względu na kapitał początkowy i współczynnik bezpieczeństwa dla rozkładu gamma z parametrami $\alpha = 0,5, \beta = 0,0005$

	$u = 0$	$u = 10^3$	$u = 5 \cdot 10^3$	$u = 10^4$	$u = 2,5 \cdot 10^4$	$u = 5 \cdot 10^4$	$u = 10^5$
$\theta = 0,05$	0,9524	0,9191	0,8088	0,6907	0,4301	0,1953	0,0403
$\theta = 0,10$	0,9091	0,8495	0,6662	0,4935	0,2008	0,0448	0,0022
$\theta = 0,15$	0,8695	0,7890	0,5575	0,3632	0,1006	0,0118	0,00016
$\theta = 0,20$	0,8333	0,7361	0,4730	0,2743	0,0536	0,0035	0,00001
$\theta = 0,25$	0,8000	0,6894	0,4062	0,2119	0,0301	0,0012	0,000002
$\theta = 0,30$	0,7692	0,6480	0,3527	0,1669	0,0177	0,0004	<

Źródło: opracowanie własne.

Tabela 4. Prawdopodobieństwa ruiny ze względu na kapitał początkowy i współczynnik bezpieczeństwa dla rozkładu gamma z parametrami $\alpha = 1, \beta = 10^{-7}$

	$u = 0$	$u = 10^5$	$u = 10^6$	$u = 5 \cdot 10^6$	$u = 10^7$	$u = 2 \cdot 10^7$	$u = 5 \cdot 10^7$
$\theta = 0,05$	0,9524	0,9479	0,9081	0,7506	0,5916	0,3674	0,0881
$\theta = 0,10$	0,9091	0,9009	0,8301	0,5770	0,3663	0,1476	0,00965
$\theta = 0,15$	0,8695	0,8583	0,7632	0,4530	0,2360	0,0640	0,00127
$\theta = 0,20$	0,8333	0,8196	0,7054	0,3622	0,1574	0,0297	0,0002
$\theta = 0,25$	0,8000	0,7842	0,6550	0,2943	0,1083	0,0147	0,00003
$\theta = 0,30$	0,7692	0,7517	0,6107	0,2426	0,0765	0,0076	0,000007

Źródło: opracowanie własne.

2. Porównanie różnych metod aproksymacji

Przegląd wybranych metod aproksymacji został przedstawiony w tabeli 5. Porównanie ich jakości w nieskończonym horyzoncie czasowym może być kłopotliwe ze względu na brak wiarygodnego punktu odniesienia. Wzory *explicite* na dokładne prawdopodobieństwo znane są tylko w konkretnych przypadkach, we wszystkich pozostałych rzetelna ocena wyników danej aproksymacji jest utrudniona, ponieważ nie znamy rzeczywistych prawdopodobieństw ruiny. Jedną z możliwości poradzenia sobie z tym problemem jest przyjęcie bardzo długiego horyzontu czasowego T , imitowanie w ten sposób *nieskończoności* i bazowanie na wynikach symulacji Monte Carlo, jednak wciąż będzie to rozwiązanie obciążone błędami, ponadto zużywające bardzo dużo mocy obliczeniowej. Inną, lepszą alternatywą jest zastosowanie twierdzenia

Pollaczka-Chinczyna, które wykorzystuje pojęcie straty sumarycznej, umożliwiając numeryczne wyznaczenie prawdopodobieństwa ruiny (Grandell 2000). W dalszej części zaprezentowane zostaną wyniki poszczególnych metod aproksymacji dla różnych rozkładów wysokości szkody (w podziale na lekko- oraz gruboogonowe) wraz z omówieniem i porównaniem na tle metody Pollaczka-Chinczyna. We wszystkich omawianych przypadkach zastosowano stały współczynnik bezpieczeństwa równy 0,25. Przegląd zastosowanych rozkładów znajduje się w tabeli 6.

Tabela 5. Przegląd wybranych metod aproksymacji prawdopodobieństwa ruiny

Typ	Aproksymacja	Wzór	Opis
Bezpośrednia aproksymacja funkcji prawdopodobieństwa ruiny	Cramera-Lundberga (skrót: C-L)	$\psi_{CL}(u) = \frac{\theta\mu}{M'_x(R) - (1 + \theta)\mu} e^{-Ru}$	Ogólne zastosowanie, szczególnie dobre wyniki dla ogromnych wartości kapitału początkowego
	Zerowa	$\psi_0(u) = \frac{1}{(1 + \theta)} e^{-Ru}$	Metoda naiwna, równość wyników dla zerowego kapitału początkowego
	Wykładnicza	$\psi_E(u) = \exp\left(-1 - \frac{2\theta\mu u - \mu^{(2)}}{\sqrt{(\mu^{(2)})^2 + \left(\frac{4}{3}\right)\theta\mu\mu^{(3)}}}\right)$	Istnienie trzech pierwszych momentów zwykłych: $\mu, \mu^{(2)}, \mu^{(3)}$ rozkładu wysokości szkody, brak oparcia na współczynniku dopasowania – możliwość aplikacji do rozkładów gruboogonowych
Aproksymacja warunkowego rozkładu całkowitej straty maksymalnej	Beekmana-Bowersa (skrót: B-B)	$\psi_{BB}(u) = \frac{1}{(1 + \theta)} \{1 - F_{Gamma(\alpha, \beta)}(u)\}$ $\alpha = \frac{\left[1 + \left(\frac{4\mu\mu^{(3)}}{3(\mu^{(2)})^2} - 1\right)\theta\right]}{(1 + \theta)}, \quad \beta = \frac{2\theta\mu}{\left[\mu^{(2)} + \left(\frac{4\mu\mu^{(3)}}{3\mu^{(2)}} - \mu^{(2)}\right)\theta\right]}$	Istnienie trzech pierwszych momentów zwykłych: $\mu, \mu^{(2)}, \mu^{(3)}$ rozkładu wysokości szkody, brak oparcia na współczynniku dopasowania – możliwość aplikacji do rozkładów gruboogonowych. Duży błąd w przypadku nieistnienia czwartego momentu (choć formalnie nie jest on wymagany do zastosowania metody)
	Renyi	$\psi_R(u) = \frac{1}{(1 + \theta)} \exp\left\{-\frac{2\theta\mu u}{\mu^{(2)}(1 + \theta)}\right\}$	Uproszczona wersja aproksymacji B-B, istnienie trzech pierwszych momentów zwykłych: $\mu, \mu^{(2)}, \mu^{(3)}$ rozkładu wysokości szkody

Tabela 5 – cd.

Typ	Aproksymacja	Wzór	Opis
Aproksymacja przyrostu procesu nadwyżki	De Vyldera	$\psi_{DV}(u) = \frac{1}{1+\hat{\theta}} e^{\left(\frac{-\hat{\beta}\hat{\mu}u}{1+\hat{\theta}}\right)}, \text{ gdzie}$ $\hat{\beta} = \frac{3\mu^{(2)}}{\mu^{(3)}}, \hat{\lambda} = \frac{9\lambda\mu^{(2)3}}{2\mu^{(3)2}}, \hat{\theta} = \frac{2\mu\mu^{(3)}\theta}{3\mu^{(2)2}}$	Istnienie trzech pierwszych momentów zwykłych: $\mu, \mu^{(2)}, \mu^{(3)}$ rozkładu wysokości szkody, brak oparcia na współczynniku dopasowania – możliwość aplikacji do rozkładów gruboogonowych
	4-gamma De Vyldera	$\psi(u) = \frac{\hat{\theta} \left(1 - \frac{R}{\hat{\alpha}}\right) \exp\left(\frac{-\hat{\beta}Ru}{\hat{\alpha}}\right)}{1 + (1 + \hat{\theta})R - (1 + \hat{\theta})\left(1 - \frac{R}{\hat{\alpha}}\right)} +$ $+ \frac{\hat{\alpha}\hat{\theta} \sin(\hat{\alpha}\pi)}{\pi} \cdot I, \text{ gdzie}$ $\hat{\lambda} = \frac{\lambda(\mu^{(3)})^2(\mu^{(2)})^3}{(\mu^{(2)}\mu^{(4)} - 2(\mu^{(3)})^2(2\mu^{(2)}\mu^{(4)} - 3(\mu^{(3)})^2)}$ $\hat{\theta} = \frac{\theta\mu[2(\mu^{(3)})^2 - \mu^{(2)}\mu^{(4)}]}{(\mu^{(2)}\mu^{(3)})^2}$ $\hat{\mu} = \frac{3(\mu^{(3)})^2 - 2\mu^{(2)}\mu^{(4)}}{\mu^{(2)}\mu^{(3)}}$ $\hat{\mu}^{(2)} = \frac{(\mu^{(2)}\mu^{(4)} - 2(\mu^{(3)})^2)(2\mu^{(2)}\mu^{(4)} - 3(\mu^{(3)})^2)}{(\mu^{(2)}\mu^{(3)})^2}$ $I = \int_0^{\infty} \frac{x^{\hat{\alpha}} \exp\{-(x+1)\hat{\beta}u\}}{[x^{\hat{\alpha}}\{1 + \hat{\alpha}(1 + \hat{\theta})(x+1)\} - \cos(\hat{\alpha}\pi)]^2 + \sin^2(\hat{\alpha}\pi)} dx,$ <p style="text-align: center;">oraz</p> $\hat{\alpha} = \frac{\hat{\mu}^2}{\hat{\mu}^{(2)} - \hat{\mu}^2} \text{ i } \hat{\beta} = \frac{\hat{\mu}}{\hat{\mu}^{(2)} - \hat{\mu}^2}$	Istnienie czterech pierwszych momentów zwykłych: $\mu, \mu^{(2)}, \mu^{(3)}, \mu^{(4)}$ rozkładu wysokości szkody, brak oparcia na współczynniku dopasowania – możliwość aplikacji do rozkładów gruboogonowych

Źródło: opracowanie własne na podstawie: Grandell 2000; Tura 2015; Burnecki, Mišta, Weron 2005a.

Tabela 6. Przegląd wybranych rozkładów prawdopodobieństwa

Typ rozkładu	Rozkład	Parametry	Funkcja gęstości
Lekkoogonowy	Wykładniczy	$\beta > 0$	$f_X(x) = \beta \exp(-\beta x)$
	Mieszana rozkładów wykładniczych	$\beta_i > 0, \sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$	$f_X(x) = \sum_{i=1}^n \{\alpha_i \beta_i \exp(-\beta_i x)\}$
	Gamma	$\alpha > 0, \beta > 0$	$f_X(x) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} \exp(-\beta x)$
Gruboogonowy	Pareto	$\alpha > 0, \beta > 0$	$f_X(x) = \frac{\alpha}{\beta + x} \left(\frac{\beta}{\beta + x}\right)^\alpha$
	Lognormalny	$\mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0$	$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma x} \exp\left\{-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right\}$
	Weibulla	$\beta > 0, 0 < \tau < 1$	$f_X(x) = \beta \tau x^{\tau-1} \exp(-\beta x^\tau)$
	Burra	$\alpha > 0, \sigma > 0, \tau > 1$	$f_X(x) = \frac{\alpha \tau \lambda^\alpha x^{\tau-1}}{(\lambda + x^\tau)^{\alpha+1}}$

Źródło: Burnecki, Teurle, Wilkowska 2019.

2.1. Rozkłady lekkoogonowe – mieszanina rozkładów wykładniczych, rozkład gamma

Tabela 7. Prawdopodobieństwa ruiny ze względu na kapitał początkowy i metodę aproksymacji dla mieszaniny rozkładów wykładniczych z parametrami $\alpha = 5 \cdot 10^{-10}$, $\beta = 7,5 \cdot 10^{-9}$, odpowiednio wagami: 0,1; 0,9

	$u = 0$	$u = 10^9$	$u = 5 \cdot 10^9$	$u = 10^{10}$	$u = 2 \cdot 10^{10}$	$u = 5 \cdot 10^{10}$
Wynik dokładny	0,8000	0,6313	0,3605	0,1791	0,0442	$6,64 \cdot 10^{-4}$
<i>Cramer – Lundberg</i>	0,7257	0,6309	0,3604	0,1791	0,0442	$6,64 \cdot 10^{-4}$
<i>Zerowa</i>	0,8000	0,6955	0,3974	0,1974	0,0487	$7,32 \cdot 10^{-4}$
<i>Wykładnicza</i>	0,7849	0,6784	0,3788	0,1828	0,0426	$5,38 \cdot 10^{-4}$
<i>Beekman – Bowers</i>	0,8000	0,6560	0,3540	0,1738	0,0442	$8,17 \cdot 10^{-4}$
<i>Renyi</i>	0,8000	0,6859	0,3707	0,1718	0,0369	$3,65 \cdot 10^{-4}$
<i>De Vylder (4-gamma)</i>	0,7434	0,6364	0,3604	0,1789	0,0442	$6,65 \cdot 10^{-4}$

Źródło: opracowanie własne.

Tabela 8. Błąd względny dla danych z tabeli 7 (w %)

	$u = 0$	$u = 10^9$	$u = 5 \cdot 10^9$	$u = 10^{10}$	$u = 2 \cdot 10^{10}$	$u = 5 \cdot 10^{10}$
Wynik dokładny	0	0	0	0	0	0
<i>Cramer – Lundberg</i>	-9,29	-0,06	-0,02	<-0,01	<-0,01	<-0,01
<i>Zerowa</i>	0	10,18	10,24	10,24	10,24	10,24
<i>Wykładnicza</i>	-1,89	7,47	5,07	2,07	-3,68	-19,06
<i>Beekman – Bowers</i>	0	3,92	-1,81	-2,94	-1,68	22,96
<i>Renyi</i>	0	8,66	2,83	-4,08	-16,55	-45,04
<i>De Vylder (4-gamma)</i>	-7,07	0,82	-0,02	0,08	<-0,01	-0,02

Źródło: opracowanie własne.

Dla podanych parametrów wartość oczekiwana rozkładu wynosi:

$$EY = \frac{0,10}{5 \cdot 10^{-10}} + \frac{0,90}{7,5 \cdot 10^{-9}} = 3,2 \cdot 10^8.$$

Zakres kapitału początkowego odpowiada zatem przedziałowi około: 3–150-krotności wysokości pojedynczej szkody z arbitralnymi punktami reprezentującymi kapitał zakładu ubezpieczeń, w których sukcesywnie odnotowywany jest zauważalny spadek kolejnych prawdopodobieństw ruiny. Subiektywna pozostaje analiza dopuszczalnego błędu względnego dla różnych poziomów kapitału początkowego – jego *wrażliwość* jest zmienna i uzależniona od wyników bezwzględnego prawdopodobieństwa ruiny – gdy jest ono niewielkie (poniżej 1%), wówczas bardzo łatwo o relatywnie duże odchylenia. Analizując tabele 7 i 8, można wysnuć kilka wniosków: poza zerowym kapitałem początkowym aproksymacje Cramera-Lundberga oraz 4-gamma De Vyldera dały świetne rezultaty, o błędzie względnym nieprzekraczającym w obie strony 1%. W przypadku aproksymacji C-L wiadomo ponadto, że zbiega ona monotonicznie z lewej strony w granicy do dokładnego wyniku, a zatem zawsze będzie ona minimalnie zaniżać rzeczywiste wyniki, co może pozwolić na stosowanie czynnika skalującego (szczególnie dla niskich wartości kapitału początkowego), by jeszcze bardziej zbliżyć się do realnego prawdopodobieństwa. Dla dużych wartości kapitału początkowego metoda ta jest zdecydowanie bezkonkurencyjna w przypadku mieszanej rozkładów wykładniczych dla zastosowanych parametrów. Z metod opartych na warunkowym rozkładzie całkowitej straty maksymalnej, aproksymacja Beekmana-Bowersa również daje bardzo zadowalające rezultaty, w każdym przypadku pokonując swoją uproszczoną wersję – aproksymację Renyi. Metoda zerowa, w przeciwieństwie do aproksymacji Lundberga, daje dokładny wynik przy zerowym kapitale początkowym, z systematycznym wzrostem błędu, który zdaje się być zbliżony do konkretnej wartości. Możliwość oszacowania maksymalnego możliwego błędu danej techniki również jest przydatną informacją, a zatem metoda ta – pomimo relatywnie dużych odchyleń – może stanowić ciekawy punkt odniesienia przy innych wartościach parametrów.

Tabela 9. Prawdopodobieństwa ruiny ze względu na kapitał początkowy i metodę aproksymacji dla rozkładu gamma z parametrami $\alpha = 0,25, \beta = 0,000003$

	$u = 0$	$u = 10^6$	$u = 2 \cdot 10^6$	$u = 3 \cdot 10^6$	$u = 4 \cdot 10^6$	$u = 5 \cdot 10^6$
Wynik dokładny	0,8	0,3038	0,1212	0,0484	0,0193	$7,71 \cdot 10^{-3}$
<i>Cramer – Lundberg</i>	0,7602	0,3035	0,1212	0,0484	0,0193	$7,71 \cdot 10^{-3}$
<i>Zerowa</i>	0,8	0,3194	0,1275	0,0509	0,0203	$8,12 \cdot 10^{-3}$
<i>Wykładnicza</i>	0,8110	0,3141	0,1216	0,0471	0,0182	$7,06 \cdot 10^{-3}$
<i>Beekman – Bowers</i>	0,8	0,3018	0,1200	0,0483	0,0195	$7,91 \cdot 10^{-3}$
<i>Renyi</i>	0,8	0,3063	0,1173	0,0449	0,0172	$6,58 \cdot 10^{-3}$
<i>De Vylder (4-gamma)</i>	0,8	0,3038	0,1212	0,0484	0,0193	$7,71 \cdot 10^{-3}$

Źródło: opracowanie własne.

Tabela 10. Błąd względny dla danych w tabeli 9 (w %)

	$u = 0$	$u = 10^6$	$u = 2 \cdot 10^6$	$u = 3 \cdot 10^6$	$u = 4 \cdot 10^6$	$u = 5 \cdot 10^6$
Wynik dokładny	0	0	0	0	0	0
<i>Cramer – Lundberg</i>	-4,98	-0,08	<-0,01	<-0,01	<-0,01	<-0,01
<i>Zerowa</i>	0	5,15	5,23	5,23	5,24	5,24
<i>Wykładnicza</i>	1,38	3,40	0,37	-2,65	-5,57	-8,41
<i>Beekman – Bowers</i>	0	-0,64	-0,95	-0,24	1,00	2,59
<i>Renyi</i>	0	0,84	-3,22	-7,18	-10,98	-14,76
<i>De Vylder (4-gamma)</i>	0	0	0	0	0	0

Źródło: opracowanie własne.

Dla rozkładu gamma z zastosowanymi w tabelach 9 i 10 parametrami wartość oczekiwana wysokości szkody wynosi:

$$EY = \frac{0,25}{3 \cdot 10^{-6}} = 83\,333, (3),$$

co przy zastosowanych wartościach kapitału początkowego daje zakres: 12–60-krotności wartości pojedynczej szkody. Bezkonkurencyjną metodą jest w tym przypadku aproksymacja 4-gamma De Vyldera, ponieważ przy wysokości szkód danych rozkładem gamma otrzymujemy dokładnie te same wartości – nowy proces aproksymowany rozkładem gamma jest w istocie od początku rozkładem gamma, wobec czego oczywi-

stym (i oczekiwanym) wnioskiem jest uzyskanie równości. Pozostałe aproksymacje zachowują się bardzo podobnie jak w przypadku mieszaniny rozkładów wykładniczych – świetne przybliżenia daje znów metoda C-L, prawie dwukrotnie zmniejszył się błąd uzyskiwany przy pomocy aproksymacji zerowej, bardzo dobrze radzi sobie również aproksymacja B-B, będąc wciąż przy każdej wartości kapitału początkowego lepsza od aproksymacji Renyi. Gdy rzeczywiste prawdopodobieństwo ruiny jest większe niż 2%, w zasadzie wszystkie metody dają akceptowalne wyniki, w sporadycznych przypadkach z błędem względnym przekraczającym 5% – i to tylko w przypadku aproksymacji Renyi (gdzie zalecane jest w przypadku wysokości szkody danej rozkładem gamma użycie metody B-B) oraz aproksymacji zerowej, która jednak obciążona jest systematycznym błędem przeszacowania, możliwym do korekty o odpowiedni czynnik skalujący w związku ze zbieżnością błędu wraz z rosnącym kapitałem początkowym.

2.2. Rozkłady gruboogonowe – rozkład Pareto, rozkład lognormalny, rozkład Weibulla, rozkład Burra

W przypadku rozkładów gruboogonowych schemat prezentowania informacji pozostaje identyczny, zmianie ulega jednak punkt odniesienia na metodę Pollaczka-Chinczyna, z uwagi na brak analitycznych wzorów i niemożność wyznaczenia dokładnego prawdopodobieństwa ruiny. Do wygenerowania wyników z użyciem tej techniki zastosowano 50 bloków po 50 000 symulacji (łącznie 2 500 000 symulacji) w każdym z omawianych rozkładów wysokości szkody. Poniżej przedstawione zostaną wyniki aproksymacji oraz błędy względne dla wysokości szkód danych rozkładami: Pareto, lognormalnym, Weibulla oraz Burra. W każdym przypadku wymagane są dodatkowe założenia co do parametrów wyżej wymienionych rozkładów, które będą gwarantować istnienie momentu odpowiedniego rzędu, by móc zastosować odpowiednie aproksymacje i/lub spełnienie definicji grubego ogona. Niestety, metody oparte na współczynniku dopasowania nie są możliwe do użycia dla jakiegokolwiek rozkładu z grubym ogonem, wobec czego ilość porównanych sposobów aproksymacji ulega naturalnej redukcji o aproksymację C-L oraz aproksymację zerową.

Tabela 11. Prawdopodobieństwa ruiny ze względu na kapitał początkowy i metodę aproksymacji dla rozkładu Pareto z parametrami $\alpha = 4,2$, $\beta = 10^9$

	$u = 0$	$u = 10^9$	$u = 2 \cdot 10^9$	$u = 5 \cdot 10^9$	$u = 10^{10}$	$u = 2 \cdot 10^{10}$
<i>Pollaczek – Chinczyn</i>	0,8	0,4805	0,3115	0,095	0,0158	$8,34 \cdot 10^{-4}$
<i>Wykładnicza</i>	0,7575	0,5092	0,3422	0,1039	0,0142	$2,68 \cdot 10^{-4}$
<i>Beekman – Bowers</i>	0,8	0,4694	0,3104	0,1000	0,0168	$5,36 \cdot 10^{-4}$
<i>Renyi</i>	0,8	0,5152	0,3318	0,0886	0,0010	$1,21 \cdot 10^{-4}$
<i>De Vylder (4-gamma)</i>	0,721	0,4680	0,3192	0,1036	0,0160	$3,83 \cdot 10^{-4}$

Źródło: opracowanie własne.

Tabela 12. Błąd względny dla danych w tabeli 11 (w %)

	$u = 0$	$u = 10^9$	$u = 2 \cdot 10^9$	$u = 5 \cdot 10^9$	$u = 10^{10}$	$u = 2 \cdot 10^{10}$
Pollaczek – Chinczyn	0	0	0	0	0	0
<i>Wykładnicza</i>	-5,31	5,98	9,88	9,38	-9,75	-67,80
<i>Beekman – Bowers</i>	<0,01	-2,30	-0,33	5,20	6,56	-35,68
<i>Renyi</i>	<0,01	7,24	6,53	-6,71	-37,83	-85,53
<i>De Vylder (4-gamma)</i>	-9,87	-2,60	2,48	9,06	1,35	-54,09

Źródło: opracowanie własne.

Tabele 11 i 12 analizują przykład rozkładu Pareto z wartościami parametrów: $\alpha = 4,2$, $\beta = 10^9$; wartość oczekiwana wysokości szkody wyniosła

$$EY = \frac{4,2 \cdot 10^9}{4,2 - 1} = 1,31 \cdot 10^9.$$

Metoda C-L oraz aproksymacja zerowa nie są możliwe do użycia z uwagi na fakt nieistnienia FGM; 4-gamma De Vylder wymaga z kolei skończonego czwartego momentu, stąd przyjęcie wartości powyżej 4 dla parametru kształtu. Najlepiej wyglądającą aproksymacją jest B-B, który dla jednocyfrowych wartości prawdopodobieństwa ruiny niewiele przekraczał 5%-ową tolerancję błędu. Zadowolająco radzi sobie również metoda 4-gamma De Vyldera. W analizie porównawczej z rozkładami lekkoogonowymi błąd względny przy niskich prawdopodobieństwach ruiny wzrasta bardzo wyraźnie, co więcej ze względu na niedostępność metody C-L nie dysponujemy narzędziami pozwalającymi pozbyć się (przynajmniej asymptotycznie) błędu szacunku. Z tego też względu przy konieczności badania ruiny na bardzo wysokim kwantylu prawdopodobieństwa (np. dla dyrektywy Solwency II 99,5%) dla wysokości szkody danej rozkładem Pareto jedynym rzetelnym wskaźnikiem jest metoda Pollaczka-Chinczyna, a w dalszej kolejności (najprawdopodobniej) aproksymacja B-B.

Tabela 13. Prawdopodobieństwa ruiny ze względu na kapitał początkowy i metodę aproksymacji dla rozkładu lognormalnego z parametrami $\mu = 19$, $\sigma = 1,03$

	$u = 0$	$u = 10^9$	$u = 2 \cdot 10^9$	$u = 5 \cdot 10^9$	$u = 10^{10}$	$u = 2 \cdot 10^{10}$
Pollaczek – Chinczyn	0,7995	0,4631	0,2979	0,0907	0,0154	$8,59 \cdot 10^{-4}$
<i>Wykładnicza</i>	0,7511	0,4998	0,3327	0,0980	0,0128	$2,18 \cdot 10^{-4}$
<i>Beekman – Bowers</i>	0,8	0,4576	0,2994	0,0944	0,0155	$4,72 \cdot 10^{-4}$
<i>Renyi</i>	0,8	0,5068	0,3211	0,0817	0,0083	$8,69 \cdot 10^{-4}$
<i>De Vylder (4-gamma)</i>	0,7119	0,4568	0,3090	0,0980	0,0146	$3,24 \cdot 10^{-4}$

Źródło: opracowanie własne.

Tabela 14. Błąd względny dla danych w tabeli 13 (w %)

	$u = 0$	$u = 10^9$	$u = 2 \cdot 10^9$	$u = 5 \cdot 10^9$	$u = 10^{10}$	$u = 2 \cdot 10^{10}$
<i>Pollaczek - Chinczyn</i>	0	0	0	0	0	0
<i>Wykładnicza</i>	-6,06	8,32	11,67	8,11	-16,74	-74,57
<i>Beekman - Bowers</i>	0,06	-1,19	0,52	4,03	0,68	-44,94
<i>Renyi</i>	0,06	9,44	7,80	-9,97	-45,79	-89,88
<i>De Vylder (4-gamma)</i>	-10,95	-1,36	3,72	8,07	-5,11	-62,28

Źródło: opracowanie własne.

W analizowanym przykładzie rozkładu lognormalnego parametry wynoszą: $\mu = 19$, $\sigma = 1,03$, co daje wartość oczekiwaną w rozkładzie równą w przybliżeniu: $EY \approx 3 \cdot 10^8$. Porównanie wyników w tabelach 13 i 14 generalnie prowadzi do podobnych wniosków co dla rozkładu Pareto. Najlepszą metodą zdaje się być wciąż aproksymacja B-B, która na przedziale prawdopodobieństwa ruiny w zakresie: 2–80% daje bardzo stabilne i zadowalające rezultaty, o błędzie względnym nieprzekraczającym 5%. Nieco słabiej, aczkolwiek wciąż satysfakcjonująco, radzi sobie również czteromomentowa metoda gamma De Vyldera – choć po raz kolejny widać, że niedoszacowuje ona prawdopodobieństwa na początku przedziału zmienności kapitału początkowego. Nie jest to jednak wada dyskwalifikująca z uwagi na fakt, że w ścisłym centrum zainteresowania są niskie wartości prawdopodobieństwa ruiny – i wyznaczenie poziomu składki dopuszczającego wystąpienie bankructwa na bardzo niskim, ale realnym i akceptowalnym poziomie. Aproksymacja wykładnicza oraz Renyi zdają się przynosić podobne rezultaty, z kilkukrotnie większym błędem od najlepszych metod w danym przykładzie (B-B oraz 4-gamma De Vyldera). Podobnie jak w przypadku rozkładu Pareto, w samym ogonie rozkładu, dla prawdopodobieństw ruiny rzędu czwartego miejsca po przecinku, wszystkie metody odnotowują istotny błąd względny, konsekwentnie zaniżając realne ryzyko bankructwa. Z ostrożnościowego punktu widzenia nie powinny one być zatem alternatywą dla wskazań uzyskanych metodą Pollaczka-Chinczyna, a ewentualnie stanowić dodatkową informację.

Tabela 15. Prawdopodobieństwa ruiny ze względu na kapitał początkowy i metodę aproksymacji dla rozkładu Weibulla z parametrami $\beta = 1$, $\tau = 0,5$

	$u = 0$	$u = 5$	$u = 10$	$u = 25$	$u = 50$	$u = 100$
<i>Pollaczek - Chinczyn</i>	0,8001	0,4854	0,2945	0,0658	0,0054	$3,68 \cdot 10^{-5}$
<i>Wykładnicza</i>	0,8323	0,4997	0,3000	0,0649	0,0050	$3,07 \cdot 10^{-5}$
<i>Beekman - Bowers</i>	0,8	0,4852	0,2943	0,0657	0,0054	$3,63 \cdot 10^{-5}$
<i>Renyi</i>	0,8	0,4852	0,2943	0,0657	0,0054	$3,63 \cdot 10^{-5}$
<i>De Vylder (4-gamma)</i>	0,8	0,4852	0,2943	0,0657	0,0054	$3,63 \cdot 10^{-5}$

Źródło: opracowanie własne.

Tabela 16. Błąd względny dla danych w tabeli 15 (w %)

	$u = 0$	$u = 5$	$u = 10$	$u = 25$	$u = 50$	$u = 100$
<i>Pollaczek - Chinczyn</i>	0	0	0	0	0	0
<i>Wykładnicza</i>	4,03	2,93	1,85	-1,33	-5,59	-16,46
<i>Beekman - Bowers</i>	-0,01	-0,04	-0,06	-0,15	0,59	-1,32
<i>Renyi</i>	-0,01	-0,04	-0,06	-0,15	0,59	-1,32
<i>De Vylder (4-gamma)</i>	-0,01	-0,04	-0,06	-0,15	0,59	-1,32

Źródło: opracowanie własne.

Rozkład Weibulla posiada ciężki ogon, gdy parametr kształtu mieści się w przedziale $(0,1)$. W rozważanym przykładzie parametry rozkładu wynoszą odpowiednio: $\beta = 1$ oraz $\tau = 0,5$, co determinuje wartość oczekiwaną równą 2. Zestawienie wyników w tabelach 15 i 16 silnie sugeruje, że w zasadzie wszystkie omówione aproksymacje są akceptowalne do zastosowania. Metody B-B, Renyi oraz De Vylde- ra dają niemal dokładne wyniki, błąd względny w ich przypadku jest w zasadzie minimalny, co więcej, nie widać istotnych różnic między żadną z wyżej wymienionych technik. Aproksymacja wykładnicza również bardzo dobrze estymuje prawdopodobieństwo na tle wyników według algorytmu Pollaczka-Chinczyna, dopiero przy prawdopodobieństwach ruiny rzędu trzeciego miejsca po przecinku błąd względny wzrasta powyżej arbitralnie przyjętego progu 5%. Wszystkie z zaprezentowanych metod poradziły sobie dużo lepiej niż w przypadku rozkładów lekkoogonowych, co rodzi pytanie o ewentualną przyczynę takiego zjawiska. Odpowiedzią może być podobieństwo między rozkładem Weibulla, a rozkładem wykładniczym przy zastosowanych w tabeli parametrach. Rozkład Weibulla, w zależności od przyjętego parametru kształtu λ , pozwala na uzyskanie szerokiej gamy rozkładów: zbliżonych do normalnego (dla dużych λ), w przypadku $\lambda = 1$ sprowadza się on do rozkładu

wykładniczego, natomiast gdy $\lambda < 1$, uzyskujemy grubszy ogon niż w wykładniczym przypadku, jednak dalej ogólny kształt i zachowanie rozkładu jest silnie związane z rozkładem wykładniczym. Wszystkie metody aproksymacji w mniejszym/większym stopniu dążą do *upodobnienia* rozkładu wysokości szkody do rozkładu wykładniczego lub dopasowania odpowiedniej liczby momentów, wobec czego intuicyjnie rosnące podobieństwo sugeruje lepsze wyniki aproksymacji. Warto odnotowania jest fakt, że zauważalne różnice występują nawet pomimo tego, że formalnie rozkład Weibulla z parametrem $k = 0,5$ jest rozkładem gruboogonowym, który wydawać by się mogło z natury rzeczy powinien być trudniejszy do oszacowania niż jakikolwiek rozkład o lekkim ogonie.

Ostatnim omówionym rozkładem będzie rozkład Burra z parametrami: $\alpha > 0$, $\sigma > 0$, $\tau > 0$. Rodzina rozkładów Burra stanowi elastyczną grupę rozkładów o grubych ogonach. Do zastosowania metod opartych na trzecim i czwartym momencie konieczne jest, by iloczyn parametrów $\alpha \cdot \sigma$ był większy niż 4. W analizowanym przykładzie wartości wynoszą odpowiednio: $\alpha = 2,5$; $\sigma = 1,65$; $\tau = 8$.

Tabela 17. Prawdopodobieństwa ruiny ze względu na kapitał początkowy i metodę aproksymacji dla rozkładu Burra z parametrami $\alpha = 2,5$, $\sigma = 1,65$, $\tau = 8$

	$u = 0$	$u = 5$	$u = 10$	$u = 25$	$u = 50$	$u = 100$
<i>Pollaczek - Chinczyn</i>	0,8000	0,4785	0,2933	0,0725	$8,03 \cdot 10^{-3}$	$2,08 \cdot 10^{-4}$
<i>Wykładnicza</i>	0,8014	0,4984	0,3100	0,0746	$6,94 \cdot 10^{-3}$	$6,02 \cdot 10^{-5}$
<i>Beekman - Bowers</i>	0,8000	0,4740	0,2951	0,0748	$7,99 \cdot 10^{-3}$	$9,59 \cdot 10^{-5}$
<i>Renyi</i>	0,8000	0,4911	0,3015	0,0670	$6,08 \cdot 10^{-3}$	$4,62 \cdot 10^{-5}$
<i>De Vylder (4-gamma)</i>	0,7616	0,4757	0,3001	0,0756	$7,58 \cdot 10^{-3}$	$7,64 \cdot 10^{-5}$

Źródło: opracowanie własne.

Tabela 18. Błąd względny dla danych w tabeli 17 (w %)

	$u = 0$	$u = 5$	$u = 10$	$u = 25$	$u = 50$	$u = 100$
<i>Pollaczek - Chinczyn</i>	0	0	0	0	0	0
<i>Wykładnicza</i>	0,17	4,17	5,71	2,95	-13,51	-71,02
<i>Beekman - Bowers</i>	<-0,01	-0,93	0,64	3,27	-0,51	-53,80
<i>Renyi</i>	<-0,01	2,64	2,81	-3,73	-24,24	-77,73
<i>De Vylder (4-gamma)</i>	-4,81	-0,59	2,34	4,27	-5,53	-63,19

Źródło: opracowanie własne.

Wyniki przedstawione w tabelach 17 oraz 18 zdają się być zbieżne z dotychczas otrzymywanymi rezultatami. Nie są one tak spektakularne jak w przypadku rozkładu Weibulla, jednak wciąż mieszczą się w akceptowalnych ramach tolerancji, a ponadto wykazują lepsze właściwości niż w przypadku np. rozkładu Pareto czy lognormalnego. Po raz kolejny najbliższe rzeczywistości wyniki daje aproksymacja B-B, co potwierdza, dlaczego obiegowo jest ona uznawana za „najlepsze z najprostszych” przybliżeń prawdopodobieństwa ruiny. Poza bardzo zadowalającymi rezultatami jej zastosowanie nie ogranicza się tylko do rozkładów lekkoogonowych, więc niejako przechodząc do zbiorczego wyciągania wniosków na podstawie wszystkich przeanalizowanych rozkładów, wydaje się, że jest to metoda polecana do użycia w pierwszej kolejności (jeśli jest to tylko możliwe ze względu na skończony trzeci moment). Nieco niżej w rekomendacji plasują się aproksymacje De Vyldera oraz Renyi, z numeryczną przewagą tej pierwszej z wymienionych, choć należy pamiętać, że w stosunku do Renyi wymaga ona istnienia kolejnych dwóch momentów (trzeciego i czwartego), a zatem jej użycie obwarowane jest dodatkowymi warunkami na rozkład wysokości szkody.

Dla konkretnych zastosowań, w szczególności lekkoogonowego rozkładu i wysokiego kapitału początkowego (w porównaniu do wartości oczekiwanej pojedynczej szkody), bezkonkurencyjna jest aproksymacja C-L. Dodatkowym atutem jest tutaj także deterministyczna znajomość *kierunku* popełnianego błędu. O ile w praktyce wysoki kapitał początkowy jest założeniem bardzo często spełnionym, o tyle brak możliwości aplikacji dla gruboogonowych rozkładów stanowi dość poważny mankament tej aproksymacji. Dodać jednak należy, że (poza nielicznymi wyjątkami) większość metod dawała przyzwoite rezultaty, przynajmniej w dość rozsądnych granicach zmienności rzeczywistego prawdopodobieństwa ruiny, nieprzekraczającego 2–5%. Z punktu widzenia sprawozdawczości jest to jednak zbyt niski poziom ufności i wgłębianie się w coraz dalsze kwantyle nieuchronnie zmniejsza możliwości kontroli błędów względnego przy niemal wszystkich aproksymacjach.

Warto też na koniec odnieść się do wyników podobnych analiz jakości metod aproksymacji prawdopodobieństwa ruiny (Grandel, Segerdahl 1971; Grandell 2000; Burnecki, Mišta, Weron 2005a). Analizy wskazują na relatywnie wysoką jakość dopasowania aproksymacji de Vyldera i Beekmana-Bowersa, co jest spójne z wnioskami wyciągniętymi w niniejszym artykule. Więcej uwagi aproksymacji de Vyldera poświęcono również w (Burnecki, Mišta, Weron 2005b), przedstawiając metodę aproksymacji opartą na pierwszych czterech momentach, jako udoskonalenie tradycyjnej wersji. Wersja oparta na czterech momentach została również wykorzystana w niniejszym artykule. Szerokiego porównania metod aproksymacji dokonano również w (Burnecki, Mišta, Weron 2005c), gdzie zastosowanie aproksymacji de Vyldera (w tym wersji opartej na czterech momentach), obok między innymi aproksymacji Beekmana-Boewersa prowadziło do relatywnie najmniejszych błędów. W tym kontekście wyniki otrzymane w niniejszym artykule pozostają spójne z wynikami otrzymanymi wcześniej przez innych badaczy.

2.3. Ocena możliwości wykorzystania różnych metod aproksymacji

W artykule zaprezentowano różne metody aproksymacji prawdopodobieństwa ruiny oraz przeprowadzono analizę jakości tych aproksymacji. Odrębną kwestią pozostaje możliwość ich wykorzystania przez zakłady ubezpieczeń w swojej działalności. Jednym z obszarów zastosowania jest taryfikacja, gdzie składka ubezpieczeniowa jest definiowana w taki sposób, żeby prawdopodobieństwo ruiny nie przekraczało ustalonego poziomu. Dysponując założeniami na temat procesu pojawiania się szkód (zarówno rozkład liczby szkód w okresie czasu, jak i rozkład wielkości pojedynczej szkody), zakład ubezpieczeń może wykorzystać zaproponowane metody aproksymacji tak, aby możliwie najbardziej precyzyjnie ustalić składkę powiązaną z ustalonym prawdopodobieństwem ruiny. Jakość dopasowania odgrywa tu kluczową rolę, gdyż niedoszacowanie prawdopodobieństwa ruiny może prowadzić do sytuacji braku wypłacalności zakładu, przeszacowanie z kolei zmniejsza przewagę konkurencyjną. Oczywiście ze względu na mnogość produktów ubezpieczeniowych, zmienność warunków ekonomicznych, zachowania klientów, ograniczeń regulacyjnych i wielu innych czynników, możliwości zastosowania teorii ruiny mogą być ograniczone. Niemniej jednak praktyczna przydatność tego rodzaju analiz może pojawić się przy analizach porównawczych, np. na pewnych etapach rozwoju oferty ubezpieczeniowej, przy porównywaniu różnych wariantów potencjalnej oferty. Drugim obszarem zastosowania metod aproksymacji jest oszacowanie prawdopodobieństwa ruiny dla istniejącego portfela umów ubezpieczenia. Wysoka wartość tego prawdopodobieństwa może oznaczać, że zakład narażony jest na nadmierne ryzyko ubezpieczeniowe i może rozważyć podjęcie działań, które pozwolą to ryzyko zmniejszyć (np. reasekuracja). Zastosowanie teorii ruiny oraz aproksymacji de Vyldera w modelu dwuwymiarowym (z uwzględnieniem reasekuracji) omawiają szerzej K. Burnecki, M. Teurle, A. Wilkowska (Burnecki, Teurle, Wilkowska 2019). Teorię ruiny można również wykorzystać w celu optymalizacji polityki wypłacania dywidend oraz osadzić szerzej w kontekście wymagań reżimu Wypłacalność II (Loisel, Gerber 2012). W tym kontekście można przededefiniować model tak, aby ruina zachodziła w momencie, gdy wskaźnik pokrycia SCR (stosunek środków własnych do kapitałowego wymogu wypłacalności) spada poniżej 100%. Mimo, iż nie oznacza to bankructwa zakładu ubezpieczeń, to jest to sytuacja niekorzystna, ponieważ zakład nie ma wystarczających środków, aby zapewnić utrzymanie prawdopodobieństwa niewypłacalności w horyzoncie jednego roku na poziomie poniżej 0,5%.

Niezależnie od celu zakładu ubezpieczeń dokładne wyznaczenie prawdopodobieństwa ruiny może nie być możliwe i dlatego niezbędne jest wykorzystanie aproksymacji. W przypadku rozkładów lekkoogonowych dobrą jakość dopasowania dla niskich wartości prawdopodobieństwa ruiny otrzymujemy w przypadku zastosowania aproksymacji Cramera-Lundberga lub aproksymacji de Vyldera. Dla rozkładów gruboogonowych lepsza okazuje się aproksymacja Beekmana-Bowersa. Decyzja zakładu o wyborze odpowiedniej metody będzie więc zależała od tego, czy w przypadku konkretnej umowy ubezpieczenia spodziewa się on rozkładu lekko- czy

gruboogonowego. Parametry niezbędne do zastosowania aproksymacji, w szczególności momenty rozkładu wielkości pojedynczej szkody, można oszacować na podstawie danych historycznych. Ważną kwestią pozostaje też ustalenie granicznego prawdopodobieństwa ruiny. Dość naturalnym wyborem może być poziom 0,5%, gdyż odpowiada on metodzie wyliczenia kapitałowego wymogu wypłacalności (SCR) wg dyrektywy Wypłacalność II. Należy jednak zwrócić uwagę, że wymóg ten odpowiada wartości narażonej na ryzyko dla całego zakładu w horyzoncie jednego roku, co nie jest spójne z oszacowaniem prawdopodobieństwa ruiny dla konkretnej grupy umów ubezpieczenia w horyzoncie nieskończonym. Można jednak rozważyć zastosowanie aproksymacji w celu oszacowania prawdopodobieństwa ruiny w horyzoncie skończonym, np. w perspektywie jednego roku. Można również, jak zaznaczono wcześniej, wykorzystać model, w którym ruinę oznacza spadek wskaźnika pokrycia SCR środkami własnymi poniżej 100%, co pozwoli zakładowi ubezpieczeń na pewnego rodzaju projekcję wymagań reżimu Wypłacalność II na przyszłość i odpowiedź na pytanie, jakie jest ryzyko niespełnienia wymogu pokrycia SCR środkami własnymi w długim horyzoncie czasowym.

Podsumowanie

W artykule zaprezentowano podstawy teoretyczne teorii ruiny, przedstawiono model klasyczny i dokładne wyniki dla wybranych rozkładów prawdopodobieństwa wysokości pojedynczej szkody (tam, gdzie prawdopodobieństwo ruiny może zostać obliczone dokładnie w sposób analityczny) oraz przeanalizowano jakość dostępnych metod aproksymacji dla wybranych rozkładów (zarówno lekko- jak i gruboogonowych), w zależności od wartości parametrów opisujących proces nadwyżki.

Na jakość aproksymacji wpływ ma wiele czynników, spośród których jednym z kluczowych, pozostających pod kontrolą zakładu ubezpieczeń, jest poziom nadwyżki początkowej. W zależności od tego poziomu różna może być jakość metod aproksymacji, mierzona jako różnica pomiędzy oszacowanym, a rzeczywistym prawdopodobieństwem ruiny (wraz ze wzrostem wysokości nadwyżki początkowej absolutne błędy aproksymacji maleją, co wiąże się ze spadkiem prawdopodobieństwa ruiny, błędy względne ulegają jednak zwykle wzrostowi). W przypadku rozkładów lekkoogonowych najniższe względne błędy szacunku zaobserwowano dla aproksymacji Cramera-Lundberga (którą na tle innych rozważanych metod można uznać za stosunkowo uproszczoną) oraz aproksymacji de Vyldera (która ma najbardziej złożoną postać spośród analizowanych metod aproksymacji). W przypadku rozkładów gruboogonowych przewagę ma aproksymacja Beekmana-Bowersa, chociaż względnie niskie błędy zaobserwowano również dla aproksymacji de Vyldera. Metody te stanowią ogólnie dość dobre przybliżenie rzeczywistego prawdopodobieństwa ruiny i z powodzeniem mogą być wykorzystywane w obliczeniach zakładu ubezpieczeń.

Mimo, że teoria ruiny jest przede wszystkim konceptem teoretycznym ułatwiającym zrozumienie ryzyka na jakie narażony jest zakład ubezpieczeń, daje się ona zastosować do kwantyfikacji ryzyka na potrzeby zarządzania ryzykiem, może również służyć jako narzędzie wspomagające w kalkulacji składek ubezpieczeniowych (wówczas celem jest ustalenie składki na takim poziomie, aby prawdopodobieństwo ruiny nie przekroczyło ustalonej wartości krytycznej). Nie sposób również pominąć swoistych interakcji pomiędzy teorią ruiny a wymaganiami reżimu Wypłacalność II. Przy zdefiniowaniu ruiny jako sytuacji, w której wskaźnik pokrycia SCR środkami własnymi spada poniżej 100%, zakład ubezpieczeń otrzymuje ciekawe narzędzie do analizy wypłacalności w długim horyzoncie czasowym (wychodząc poza ramy jednego roku zdefiniowane przy wyliczaniu kapitałowego wymogu wypłacalności). We wszystkich tych obszarach dokładne obliczenie prawdopodobieństwa ruiny może okazać się niewykonalne i konieczne są aproksymacje. Teoria ta może też być stosowana w takich obszarach pozaubezpieczeniowych, jak np. wycena opcji (Gerber, Shiu 1999). Zrozumienie metod aproksymacji ruiny, ich jakości oraz ograniczeń pozwala efektywniej wykorzystać teorię ruiny do analizy rzeczywistych procesów szkodowych w zakładzie ubezpieczeń i w innych obszarach, w jakich teoria ta ma zastosowanie.

Bibliografia

- Burnecki K., Mišta P., Weron A. (2005a), *What is the best approximation of ruin probability in infinite time?*, Acta Phys Pol B, vol. 32(2).
- Burnecki K., Mišta P., Weron A. (2005b), *A new gamma type approximation of the ruin probability*, „Applicationes Mathematicae”, vol. 36 (5).
- Burnecki K., Mišta P., Weron A. (2005c), *Ruin Probabilities in Finite and Infinite Time*, Statistical Tools for Finance and Insurance.
- Burnecki K., Teuerle M., Wilkowska A. (2019), *De Vylder type approximation of the ruin probability for the insurer-rerinsurer model*, „Mathematica Applicanda”, vol. 47(1).
- Dyrektywa Parlamentu Europejskiego i Rady 2009/138/WE z dnia 25 listopada 2009 r. w sprawie podejmowania i prowadzenia działalności ubezpieczeniowej i reasekuracyjnej (Wypłacalność II).
- Gerber H.U., Shiu E.S.W. (1999), *From ruin theory to pricing reset guarantees and perpetual put options*, „Insurance: Mathematics and Economics”, 24, 3–14.
- Grandell J. (1991), *Aspects of Risk Theory*, Springer, Nowy Jork.
- Grandell J. (2000), *Simple approximations of ruin probabilities*, „Insurance: Mathematics and Economics”, vol. 26.
- Grandell J., Segerdahl C.-O. (1971), *A Comparison of Some Approximations of Ruin Probabilities*, Skand. Aktuarietidskr.
- Kaas R., Goovaerts M., Dhaene J., Denuit M. (2009), *Modern Actuarial Risk Theory Using R*, Second Edition, Springer.

Loisel S., Gerber H.-U. (2012), *Why ruin theory should be of interest for insurance practitioners and risk managers nowadays*, Actuarial and Financial Mathematics, Brussels, Belgium.

Niemiro W. (2013), *Teoria ryzyka w ubezpieczeniach*, www.users.mat.umk.pl/~wniem/Ryzyko/RyzykoUB.pdf

Otto W. (2008), *Matematyka w ubezpieczeniach. Ubezpieczenia majątkowe. Część I. Teoria ryzyka*, WNT, Warszawa.

Rolski T. (2010), *Some Problems in the Theory of Risk*, Instytut Matematyczny PAN, Warszawa.

Shortle J., Fischer M., Gross D., Masi D. (2003), *Using the Transform Approximation Method to Analyze Queues with Heavy-Tailed Service*, „Journal of Probability and Statistical Science”, vol. 1.

Szekli R. (2012), *Teoria Ryzyka*, Skrypt do wykładu, Uniwersytet Wrocławski, 2012/2013.

Tura K. (2015), *Aproksymacja De Vyldera prawdopodobieństwa ruiny dla modelu z czasem ciągłym w nieskończonym horyzoncie czasowym*, „Studia Oeconomica Posnaniensia”, 3, nr 11.

Ustawa z dnia 11 września 2015 r. o działalności ubezpieczeniowej i reasekuracyjnej (Dz.U. 2015 poz. 1844).